**History shows the necessity for the invention new numbers in the orderly progress of civilisation and in the evolution of mathematics. We must review briefly the growth of the number systern in the light of the theory of equations and see why the complex number system need not be enlarged further, Suppose we decide that we want all polynomial equations to have roots, Now let us imagine that we have no numbers in our possession except the natural numbers. Then a simple linear equation like 2x=3 has no root. In order to remedy this condition, We invent fractions, But a simple linear equation, like x+5=2 has no root even among the fractions. Hence we invent negative numbers. A simple quadratic equation like x2= 2 has no root among all the (positive and negative) rational numbers, therefore we invent the irrational numbers which together with the rational numbers complete the system of real numbers.**

История показывает необходимость изобретения новых чисел в упорядоченном прогрессе цивилизации и в развитии математики. Мы должны кратко рассмотреть рост системы чисел в свете теории уравнений и понять, почему комплексная система чисел не нуждается в дальнейшем расширении, предположим, что мы решили, что все полиномиальные уравнения должны иметь корни, теперь давайте представим, что у нас нет никаких чисел в нашем распоряжении, кроме натуральных чисел. Тогда простое линейное уравнение типа 2x=3 не имеет корня. Чтобы исправить это условие, мы изобретаем дроби, но простое линейное уравнение, такое как x+5=2, не имеет корня даже среди дробей. Поэтому мы изобретаем отрицательные числа. Простое квадратное уравнение типа x2= 2 не имеет корня среди всех (положительных и отрицательных) рациональных чисел, поэтому мы изобретаем иррациональные числа, которые вместе с рациональными числами завершают систему действительных чисел.

**However, a simple quadratic equation like x?= -1 has no root among all the real numbers, hence, we invent the pure imaginary numbers. But a simple quadratic equation like x2 2x-4 = 0 has no roots among either the real or pure imaginary numbers; therefore we invent the complex numbers. The story of y-1 the imaginary unit, and of x-ty i, the complex number, originated in the logical development of algebraic theory. The word "imaginary" reflects the elusive nature of the concept for distinguished mathematicians who lived centuries ago. Early consideration of the square root of a negative number brought unvarying rejection, It seems obvious that a negative number is not a square, and hence it was concluded that such square roots had no meaning. This attitude prevailed for a long time.**

Однако простое квадратное уравнение, такое как x?= -1, не имеет корня среди всех действительных чисел, поэтому мы изобретаем чистые мнимые числа. Но простое квадратное уравнение типа x2 2x-4 = 0 не имеет корней ни среди действительных, ни среди чисто мнимых чисел; поэтому мы изобретаем комплексные числа. История y-1, мнимой единицы, и x-ty i, комплексного числа, возникла в логическом развитии алгебраической теории. Слово "воображаемый" отражает неуловимую природу понятия для выдающихся математиков, живших столетия назад. Раннее рассмотрение квадратного корня из отрицательного числа принесло неизменное неприятие, кажется очевидным, что отрицательное число не является квадратом, и поэтому был сделан вывод, что такие квадратные корни не имеют никакого значения.

**G. Cardano (1545) is credited with some progress in introducing complex numbers in his solution of the cubic equation, even though he regarded them as "fictitious". He is credited also with the first use of the square root of a negative number in solving the now-famous problem, "Divide 10 into two parts such thathe product is 40", which Cardano first says is "manifestly impossible"; but then he goes on to say, in a properly advanturous spirit, "Nevertheless, we will operate".Thus he found 5+1/15 and 5-y 15 and showed that they did indeed have the sum of 10 and a product of 40. Cardano concludes by saving that these quantities are "truly sophisticated" and that to continue working with them is "as subtle as it is useless". Cardano did not use the symboly -15, his designation was "R,m", that is, "radix minus", for the square root of a negative number. R. Descartes (1637) contributed the terms "real" and "imaginary", L. Euler (1748) used for and C. F. Gauss (1832) introduced the term "complex number". He made significant contributions to the understanding of complex numbers through graphical representation and defined complex numbers as ordered pairs of real numbers for which (a, b) (c, d) = (ac-bd, ad+bc), and so forth.**

Кардано (1545) приписывают некоторый прогресс во введении комплексных чисел в его решение кубического уравнения, хотя он считал их "фиктивными". Ему приписывают также первое использование квадратного корня из отрицательного числа при решении известной теперь задачи "разделить 10 на две части таким образом, чтобы произведение было 40", которую Кардано сначала называет "явно невозможной"; но затем он продолжает говорить в должным образом прогрессивном духе: "тем не менее, мы будем действовать".Таким образом, он нашел 5+1/15 и 5-y 15 и показал, что они действительно имеют сумму 10 и произведение 40. Кардано приходит к выводу, что эти величины "действительно сложны" и что продолжать работать с ними "так же тонко, как и бесполезно". Кардано не использовал символ -15, его обозначение было "R,m", то есть "радикс минус", для квадратного корня отрицательного числа. Р. Декарт (1637) ввел термины "действительное" и "мнимое", л. Эйлер (1748) использовал для и К. Ф. Гаусс (1832) ввел термин "комплексное число". Он внес значительный вклад в понимание комплексных чисел посредством графического представления и определил комплексные числа как упорядоченные пары действительных чисел, для которых (a, b) (c, d) = (ac-bd, ad+bc) и т. д.

**Now, we may well expect that there may be some equation of degree 3 or higher which has no roots, even in the entire system of complex numbers. That this is not the case was known to C. F. Gauss, who proved in 1799 the following theorem, the truth of which had long been expected: Every algebraic equation of degree n with coefficients in the complex number system has a root (and hence n roots) among the complex numbers. Later Gauss published three more proofs of the theorem**.

Теперь мы вполне можем ожидать, что может существовать некоторое уравнение степени 3 или выше, которое не имеет корней даже во всей системе комплексных чисел. Гауссу, который доказал в 1799 году следующую теорему, истинность которой давно ожидалась: каждое алгебраическое уравнение степени n с коэффициентами в комплексной системе счисления имеет корень (а значит, и n корней) среди комплексных чисел. Позже Гаусс опубликовал еще три доказательства теоремы.

**It was he who called it "Fundamental Theorem of Algebra". Much of the work on complex number theory is Gauss's. He was one of the first to represent complex numbers as points in a plane. Actually, Gauss gave four proofs for the theorem, the last when he was seventy; in the first three proofs he assumes the coefficients of the polynomial equation are real, but in the fourth proof the coefficients are any complex numbers. We can be sure now that for the purpose of solving polynomial equations we do not need to extend the number system any further**

Именно он назвал ее "фундаментальной теоремой алгебры". Большая часть работ по теории комплексных чисел принадлежит Гауссу. Он был одним из первых, кто представил комплексные числа в виде точек на плоскости. На самом деле Гаусс дал четыре доказательства теоремы, последнее, когда ему было семьдесят; в первых трех доказательствах он предполагает, что коэффициенты полиномиального уравнения реальны, но в четвертом доказательстве коэффициенты являются любыми комплексными числами. Теперь мы можем быть уверены, что для решения полиномиальных уравнений нам не нужно расширять систему счисления дальше

**Algebraic Formulas for the Roots**

**The general linear equation can be written in the form ax+b-0 (a /0), hence the formula for its roots is x= The mathematician's desire for several results makes it natural to ask the following question: Can we get similar formulas giving the roots as algebraic expressions in terms of the coefficients for the general equation of any degree? For the general quadratic and cubic equations and equation of degree four such formulas, as we have already seen, were obtained in the XVI c. The next task was naturally to obtain similar formulas for the general equation of degree five: ax? bx4- cx2 - dx2+ex+f=0. Attempts find such formulas were made from the XVI c. until early in the XIX c. without success. The reason for this failure became evident (in 1824) when N. H. Abel and E. Galois (in 1831) proved that it is not possible to write the roots of the general equation of degree higher than four as algebraic expressions in terms of the coefficients, You may be tempted to ask: "How can you boldly assert that it is impossible to find such for formulas? Perhaps some day some genius will discover them. All things are possible, Are you sure you don't mean simply that no one has found them yet?" The answer is that we do not merely mean that no one has found them yet; we mean that no one will ever find them because it is impossible for such formulas to exist. Notice that we have not said that the general equation of degree five cannot be solved. In fact, it can be solved by other means, but its roots cannot be given as algebraic expressions in the coefficients. However, the roots of some particular equations of degree five or more can be obtained. For example, if in the fifth degree equation above, we restrict ourselves to the particular case where b=c=d=e=0 a==0, that is, to equations of the form ax5- f- 0, then we can clearly express one root as x=y - fla which an algebraic expression, Therefore a natural question to raise is: Given a definite polynomial equation of degree five or more, how can we tell whether or not its roots are expressible as algebraic expressions in its coefficients? This question was settled by E. Galois.**

Общее линейное уравнение может быть записано в виде ax+b-0 (a /0), следовательно, формула для его корней равна x= Желание математика получить несколько результатов делает естественным задать следующий вопрос: можем ли мы получить аналогичные формулы, дающие корни в виде алгебраических выражений в терминах коэффициентов для общего уравнения любой степени? Для общих квадратичных и кубических уравнений и уравнения четвертой степени такие формулы, как мы уже видели, были получены в XVI в. Следующая задача, естественно, состояла в том, чтобы получить аналогичные формулы для общего уравнения пятой степени: ax? bx4 - cx2 - dx2+ex+f=0. Попытки найти такие формулы предпринимались с XVI в. до начала XIX в. безрезультатно. Причина этой неудачи стала очевидной (в 1824 г.), когда н. Х. Абель и Э. Галуа (в 1831 г.) доказали, что нельзя записать корни общего уравнения степени выше четырех в виде алгебраических выражений в терминах коэффициентов, у вас может возникнуть соблазн спросить: "как вы можете смело утверждать, что невозможно найти такие для формул? Может быть, когда-нибудь какой-нибудь гений откроет их. Все возможно, вы уверены, что не имеете в виду просто, что никто еще не нашел их?" Ответ заключается в том, что мы не просто имеем в виду, что никто еще не нашел их; мы имеем в виду, что никто никогда не найдет их, потому что такие формулы не могут существовать. Заметьте, что мы не сказали, что общее уравнение пятой степени не может быть решено. На самом деле, она может быть решена другими способами, но ее корни не могут быть даны в виде алгебраических выражений в коэффициентах. Однако корни некоторых частных уравнений пятой степени или более могут быть получены. Например, если в уравнении пятой степени выше мы ограничиваемся частным случаем, где b=c=d=e=0 a==0, то есть уравнениями вида ax5 - f - 0, то мы можем ясно выразить один корень как x=y - fla, которое является алгебраическим выражением, поэтому возникает естественный вопрос: учитывая определенное полиномиальное уравнение пятой степени или более, как мы можем сказать, являются ли его корни выразимыми как алгебраические выражения в его коэффициентах? Этот вопрос был решен Э. Галуа.

**Before describing the momentous work of Abel and Galois, we must note some of the events immediately preceding and directly influencing the remarkable achievements of these gifted young mathematicians both of whom died in their twenties. In 1770 Euler devised a new method for solving the quartic equation but his optimistic hope that some similar method could solve the general polynomial equation was ill-fated. In the same year Lagrange considered the problem of solving the general polinomial equation by comparing the known solutions of quadratic, cubic and quartic equations and noting that in each of these three cases a certain reduction transformed the equation to one of the lower degree; but, unhappily, when Lagrange tried this "reduction" on a quintic equation, the degree of the resulting equation was increased rather than decreased. Although Lagrange did not succeed in his main objective, his attack on the problem made use of permutations of the roots of the equations; and he discovered the key to the theory of permutation groups, including the property mentioned earlier and now called La grange's theorem.**

Прежде чем описывать важнейшие работы Абеля и Галуа, мы должны отметить некоторые события, непосредственно предшествовавшие и непосредственно повлиявшие на замечательные достижения этих одаренных молодых математиков, которые оба умерли в возрасте двадцати лет. В 1770 году Эйлер разработал новый метод решения квартильного уравнения, но его оптимистическая надежда на то, что какой-то подобный метод может решить общее полиномиальное уравнение, оказалась неудачной. В том же году Лагранж рассмотрел проблему решения общего полиномиального уравнения, сравнив известные решения квадратичных, кубических и квартичных уравнений и отметив, что в каждом из этих трех случаев определенная редукция преобразовала уравнение в одну из более низких степеней; но, к сожалению, когда Лагранж попробовал эту "редукцию" на квинтовом уравнении, степень полученного уравнения была увеличена, а не уменьшена. Хотя Лагранж не преуспел в своей главной цели, его атака на проблему использовала перестановки корней уравнений; и он открыл ключ к теории групп перестановок, включая свойство, упомянутое ранее и теперь называемое теоремой Ла гранжа.

**Both Abel and Galois built on Lagrange's work… It is not surprising that Abel approached the general problem of trying to solve the polynomial equation of degree n by trying to solve the general quintic equation, In fact, he thought he had succeeded and the "solution" was sent to a leading mathematician, but while waiting for a reply, Abel fortunately discovered his mistake and this misadventure caused him to wonder whether a general algebraic solution was indeed possible. Although Abel succeeded in showing that for n greater than four the general polynomial equation could not be solved algebraically, he did not claim to have completely achieved the objective he set ior himself: 1) to find all the equations of any degree which are solvable algebraically; 2) to determine whether a given equation is or is not solvable algebraically.**

И Абель, и Галуа опирались на работы Лагранжа… Неудивительно, что Абель подошел к общей проблеме, пытаясь решить полиномиальное уравнение степени n, пытаясь решить общее квинтическое уравнение, на самом деле он думал, что ему это удалось, и "решение" было отправлено ведущему математику, но, ожидая ответа, Абель, к счастью, обнаружил свою ошибку, и это несчастье заставило его задаться вопросом, действительно ли возможно общее алгебраическое решение. Хотя Абелю удалось показать, что для n больше четырех общее полиномиальное уравнение не может быть решено алгебраически, он не утверждал, что полностью достиг цели, которую он поставил перед собой: 1) Найти все уравнения любой степени, которые разрешимы алгебраически; 2) определить, является ли данное уравнение или не является разрешимым алгебраически.

**It was fortunate that Abel's proof, in which he used permutation groups to some extent, received early publication. This proof caught the imagination of Galois who gave complete answers to the questions proposed by Abel. Galois showed that every equation could be associated with a characteristic group and that the properties of this group could be used to determine whether the equation could be solved by radicals. In 1831 Galois stated his criterion: A polynomial equation is solvable if and only its group, over the field, is solvable. The concepts associated with this result was usually characterized as Galois's theory. In his work he used the idea of isomorphic groups, and was the first to demonstrate the importance of invariant (or normal) subgroups and factor groups. The term "group" is due to Galois, The work of Galois was quite original in character and was not well understood at the time because of the sketchy expositions which he presented.Galois's mathematical abilities were not appreciated by his teachers, and in fact he received no recognition for his work while he lived, Although Galois's accomplishments were mathematical landmarks of the greatest significance and originality, they did not immediately make their full impact on his contemporaries because these men were slow to understand, appreciate, and publish Galois's work. However, what is now called the Galois theory of equations is studied everywhere by advanced students of mathematics.**

К счастью, доказательство Абеля, в котором он до некоторой степени использовал группы перестановок, получило раннюю публикацию. Это доказательство захватило воображение Галуа, который дал полные ответы на вопросы, предложенные Абелем. Галуа показал, что каждое уравнение может быть связано с характеристической группой и что свойства этой группы могут быть использованы для определения того, может ли уравнение быть решено с помощью радикалов. В 1831 году Галуа сформулировал свой критерий: полиномиальное уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда разрешима его группа над полем. Понятия, связанные с этим результатом, обычно характеризовались как теория Галуа. В своей работе он использовал идею изоморфных групп и был первым, кто продемонстрировал важность инвариантных (или нормальных) подгрупп и факторных групп. Термин "группа" происходит от Галуа, работа Галуа была довольно оригинальна по своему характеру и не была хорошо понята в то время из-за отрывочных экспозиций, которые он представил.Математические способности Галуа не были оценены его учителями, и фактически он не получил признания за свою работу, пока он жил, хотя достижения Галуа были математическими вехами величайшего значения и оригинальности, они не сразу оказали свое полное влияние на его современников, потому что эти люди были медленными, чтобы понять, оценить и опубликовать работу Галуа. Однако то, что теперь называется теорией уравнений Галуа, изучается повсюду продвинутыми студентами математики.

**Abel was not yet 27 when he died leaving behind a wealth of highly original work which stimulated mathematical research for many years after. Galois was killed in a duel at the age of less than 21. Abel and Galois proved in entirely different ways that there cannot be any general formulas for solving polynomial equations of degree higher than four. At least there can be no formulas which give the solutions in terms of the and which involve only addition, subtraction, multiplication, division and the extraction of roots,**

Авелю еще не было 27 лет, когда он умер, оставив после себя множество весьма оригинальных работ, которые стимулировали математические исследования в течение многих лет после этого. Галуа был убит на дуэли в возрасте менее 21 года. Абель и Галуа совершенно по-разному доказали, что не может быть никаких общих формул для решения полиномиальных уравнений степени выше четырех. По крайней мере, не может быть формул, которые дают решения в терминах и которые включают только сложение, вычитание, умножение, деление и извлечение корней,

FIELDS, RINGS, GROUPS

**The concept of a "field" was used by both Abel and Galois at an intuitive, subformal level in their work on polynomial equations. In algebra the word " field" is used to describe a structure that closely resembles ordinary arithmetic. The operations of addition, subtraction, multiplication and division occur in a field and are much like the corresponding operations in arithmetic. The set of real numbers, under ordinary addition and multiplication, is the most familiar example of a field. There exists a large variety of fields in algebra. In ordinary algebra in which the letters represent real numbers, the field axioms are assumed. One of the most interesting field properties usually assumed in ordinary algebra (actually it is not an axiom but a theorem) is the "nonexistence of zero divisors". This is used in solving quadratic equation by the factoring method and guarantees that if a product like 2) 3) is zero, at least one of the must be zero, In 1871 R. Dedekind gave a concrete formulation and the earliest expositions of the theory of fields, One of the greatest accomplishments oi the XIX c. in mathematics is expressed in the statement that the real number system is a "complete ordered field".**

Понятие "поля" использовалось как Абелем, так и Галуа на интуитивном, субформальном уровне в их работе над полиномиальными уравнениями. В алгебре слово "поле" используется для описания структуры, которая очень напоминает обычную арифметику. Операции сложения, вычитания, умножения и деления происходят в поле и очень похожи на соответствующие операции в арифметике. Набор действительных чисел, при обычном сложении и умножении, является наиболее известным примером поля. В алгебре существует большое разнообразие полей. В обычной алгебре, в которой буквы представляют действительные числа, аксиомы поля предполагаются. Одним из наиболее интересных свойств поля, обычно предполагаемых в обычной алгебре (на самом деле это не аксиома, а теорема), является "несуществование нулевых делителей". Это используется при решении квадратичных уравнений методом факторинга и гарантирует, что если произведение типа 2) 3) равно нулю, то хотя бы одно из них должно быть равно нулю, в 1871 году Р. Дедекинд дал конкретную формулировку и самые ранние изложения теории полей, одного из величайших достижений XIX века. в математике это выражается в утверждении, что вещественная система счисления является "полным упорядоченным полем".

**More formally the word "field" means a mathematical system in which addition and multiplication can be carried out in a way that satisfies the familiar rules, namely (1) the commutative law of addition and multiplication, (2) the associative law of addition and multiplication, (3) the distributive law. Furthermore, a field must contain a zero element 0, characterized by the property, that x+0=x for any element x It contains a unit element, l, that has the property that 1×x-x. For any given element x there exists another element such that - x+x=0. Finally, for any elements x (x=+0) a field must contain an element 1/x such that x(1/x) 1. Thus, a is a structure (exemplified by e. g. the rational numbers) whose elements can be added, subtracted, multiplied and divided under the familiar rules of arithmetic.**

Более формально слово "поле" означает математическую систему, в которой сложение и умножение могут выполняться способом, удовлетворяющим известным правилам, а именно (1) коммутативному закону сложения и умножения, (2) ассоциативному закону сложения и умножения, (3) закону распределения. Кроме того, поле должно содержать нулевой элемент 0, характеризующийся тем свойством, что x+0=x для любого элемента x оно содержит единичный элемент l, обладающий свойством, что 1×x-x. Для любого данного элемента x существует другой такой элемент, что - x+x=0. Наконец, для любых элементов Х (Х=+0) поле должно содержать элемент 1/х такой, что Х(1/х) 1. Таким образом, структура (на примере электронной. г. рациональные числа), элементы которого можно складывать, вычитать, делить и умножать в рамках знакомых правил арифметики.

**Considering now the second word, a field is "ordered" if the sizes of its elements can be compared. The shorthand symbol used to denote this property is the sign >, meaning "greater than". The This symbol must obey its own set of rules, (1) the trichotomy law: for any two elements and y, exactly one of the following three relations is true, x >y, x=y, y> x; (2) the transitivity law: if x>y and y>z then x>2; (3) the law of addition: if x>y, then x+z>y+z; (4) the law of multiplication: if ×>y and z>0, then xz>yz.**

Рассматривая теперь второе слово, в поле "заказать", если размеры его элементов можно сравнивать. Сокращенным символом, используемым для обозначения этого свойства, является знак>, означающий "больше, чем". Этот символ должен подчиняться своему собственному набору правил: (1) закону трихотомии: для любых двух элементов и y верно ровно одно из следующих трех соотношений, x >y, x=y, y> x; (2) закону транзитивности: если x>y и y>z, то x>2; (3) закону сложения: если x>y, то x+z>y+z; (4) закону умножения: если ×>y и z>0, то xz>yz.

**Finally, what do we mean by the word "complete" in describing the the system of real numbers as a "complete ordered field"? This has to do with the problem raised by a number such as y2. Practically speaking, y2 is given by a sequence of rational numbers such as 1, 1.4, 1.41, that provide better and better approximation to it. Squaring these numbers yields a sequence of numbers that are getting closer and closer to 2. So, we think of y2 as a "limiting value" of such a sequence of approximation. An ordered field is called "complete" ii, corresponding to any regular sequence of elements, there is an element of the field that the sequence approaches as a limiting value. This is "the law of completenss", the final axiomatic requirement for the real-number system.**

Наконец, что мы подразумеваем под словом "полный", описывая систему действительных чисел как "полное упорядоченное поле"? Это связано с проблемой, вызванной таким числом, как y2. Практически говоря, y2 задается последовательностью рациональных чисел, таких как 1, 1.4, 1.41, которые обеспечивают все лучшее и лучшее приближение к нему. Возведение этих чисел в квадрат дает последовательность чисел, которые становятся все ближе и ближе к 2. поэтому мы думаем о y2 как о "предельном значении" такой последовательности аппроксимации. Упорядоченное поле называется "полным" ii, соответствующее любой регулярной последовательности элементов, есть элемент поля, к которому эта последовательность приближается как к предельному значению. Это "закон завершенности", последнее аксиоматическое требование для системы действительных чисел.

**In a field as we have just seen, we can add, subtract, multiply and divide (except that division by 0 is barred). Not all algebraic structures have as comprehensive a list of operations. In a Ring, for example, We can add, subtract and multiply but not necessarily divide, A familiar example of a Ring is the whole numbers, both positive and negative. Even more restricted than a ring is the concept of a group, with the existence in it of only one operation, which can be thought of as a kind of generalized multiplication. The idea of a group is one which pervades the whole of modern mathematics both pure and applied. The theory of groups, a central concern of contemporary mathematics, has evolved through a progression of abstractions. A group is one of the simplest and the most important algebraic structures of consequence. Group theory traces its origin back to a problem that has fascinated mathematicians since the Middle Ages: the solution of algebraic equations of degree greater than two by algebraic processes. In the particular form of the study of symmetry, group theory can claim to have its origin in prehistoric times. Nowadays, group theory is developed in an abstract way so that it can be applied in many different circumstances but many of those applications still concern symmetry.**

В поле, как мы только что видели, мы можем складывать, вычитать, умножать и делить (за исключением того, что деление на 0 запрещено). Не все алгебраические структуры имеют столь полный перечень операций. В кольце, например, мы можем складывать, вычитать и умножать, но не обязательно делить, знакомый пример кольца-это целые числа, как положительные, так и отрицательные. Еще более ограниченным, чем кольцо, является понятие группы с существованием в ней только одной операции, которую можно рассматривать как своего рода обобщенное умножение. Идея группы-это та, которая пронизывает всю современную математику, как чистую, так и прикладную. Теория групп, центральная проблема современной математики, развивалась в процессе развития абстракций. Группа-это одна из простейших и наиболее важных алгебраических структур следствия. Теория групп берет свое начало от проблемы, которая увлекала математиков со времен Средневековья: решение алгебраических уравнений степени больше двух алгебраическими процессами. В особой форме изучения симметрии теория групп может претендовать на то, что она берет свое начало в доисторические времена. В настоящее время теория групп развивается абстрактно, так что ее можно применять во многих различных обстоятельствах, но многие из этих приложений все еще касаются симметрии.

**Some of the components of the group concept (i. e., those essential properties that were later abstracted and formulated as axioms) and also of the field concept, were recognized as early as 1650 B. C. when the Egyptians showed a curious awareness that something was involved in assuming that ab=ba. The Egyptians also freely used the distributive low, namely, abc) = ab-tac, but without any comment. The Babylonians (c. 1700 B. C.) also used the commutative and distributive laws, These laws were tacitly assumed in their rhetorical algebra when, effect they used such formulas as (a-+ b) Greek mathematics, we see that Euclid was more aware of the explicit nature of the distributive law, declaring in his Proposition 1: a(b+c +d) = ab+ac+ad. Somewhat later Diophantus exhibited interesting in-sights regarding multiplicative inverses and the unity element. One may perhaps claim that the concept of a cyclic group is prehistoric in the sense that the Ancients measured a circle by using equal divisions of its circumference, or that the 24-hour clocks of the Babylonians and Egyptians were (implicitly) examples of finite additive groups with 24 used as a zero element and Euclid's work contains at the implicit level what is classified now as algebraic number theory and group theory.**

Некоторые из компонентов групповой концепции (то есть те существенные свойства, которые позже были абстрагированы и сформулированы как аксиомы), а также концепции поля, были признаны еще в 1650 году до н. э., когда египтяне проявили любопытное понимание того, что что-то было вовлечено в предположение, что ab=ba. Египтяне также свободно пользовались дистрибутивным низким, а именно abc) = ab-tac, но без каких-либо комментариев. Вавилоняне (около 1700 г. до н. э.) также использовали коммутативные и распределительные законы, эти законы были молчаливо приняты в их риторической алгебре, когда, когда они использовали такие формулы, как (a-+ b) греческая математика, мы видим, что Евклид был более осведомлен о явной природе распределительного закона, объявив в своем предложении 1: a(b+c +d) = ab+ac+ad. Несколько позже Диофант продемонстрировал интересные взгляды относительно мультипликативных инверсий и элемента единства. Возможно, можно утверждать, что понятие циклической группы является доисторическим в том смысле, что древние измеряли окружность, используя равные деления ее окружности, или что 24-часовые часы вавилонян и египтян были (неявно) примерами конечных аддитивных групп с 24, используемыми в качестве нулевого элемента, и работа Евклида содержит на неявном уровне то, что сейчас классифицируется как алгебраическая теория чисел и теория групп.

**The group concept was not recognized as explicitly as were some of its axioms, but even so it was implicitly sensed and used before Abel and Galois brought it into focus and before Cayley (1854) defined a general abstract group, During the two hundred years from Viete to Abel and Galois, in the work of some great mathematicians an implicit grasp of the group concept was already to be found. During the seventeenth century it was clear to those working with the nth roots of unity that these n elements formed a multiplicative cyclic group and that the primitive the roots could be used as generators of the group, The use of group theory at the level -- and a striking is found in Euler's proof (1760 -1761) of a generalization of Fermat's "little theorem", Euler was actually using an idea later formulated by Lagrange (1770) and now known as Lagrange's theorem, which savs that the number of elements in the first-column subgroup divides the number of elements in the whole table. Lagrange gave the idea an explicit and general formulation and showed that the number of elements in a symmetric group is divisible by the number of elements in any subgroup (which is, of course, a permutation group). Hence his result was valid for non-Abelian permutation groups as well as for Abelian groups.**

Концепция группы не была признана столь явно, как некоторые из ее аксиом, но даже в этом случае она была имплицитно воспринята и использована до того, как Абель и Галуа сфокусировали ее и до того, как Кейли (1854) определил общую абстрактную группу, в течение двухсот лет от вьете до Абеля и Галуа, в работах некоторых великих математиков уже можно было найти имплицитное понимание концепции группы. В течение семнадцатого века тем, кто работал с N-мя корнями единства, было ясно, что эти n элементов образуют мультипликативную циклическую группу и что примитивные корни могут быть использованы в качестве генераторов группы, использование теории групп на уровне-и поразительное находится в доказательстве Эйлера (1760-1761) обобщения "маленькой теоремы Ферма", Эйлер фактически использовал идею, позже сформулированную Лагранжем (1770) и теперь известную как теорема Лагранжа, которая утверждает, что число элементов в подгруппе первого столбца делится на количество элементов во всей таблице. Лагранж дал этой идее явную и общую формулировку и показал, что число элементов в симметричной группе делится на число элементов в любой подгруппе (которая, конечно же, является группой перестановок). Следовательно, его результат был справедлив как для неабелевых групп перестановок, так и для Абелевых групп.